Université Paris 6 Pierre et Marie Curie
Année 2009-2010
LM110 - Fonctions

C. Dupont

Contrôle des connaissances de terminale : corrigé

Vrai ou faux

1. *Pour tout réel x, on a $\sqrt{x^2} = x$.*
   Faux
   Pour tout réel x on a $\sqrt{x^2} = |x|$, par exemple $\sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$.
2. *La composée de deux fonctions croissantes est une fonction croissante.*
   Vrai
   La démonstration est simple. Soient $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions croissantes. Alors pour tous réels x et y tels que $x \leq y$, on a $f(x) \leq f(y)$ et donc $g(f(x)) \leq g(f(y))$. Donc la fonction $g \circ f$ est croissante.
   On peut aussi se convaincre que la composée de deux fonctions décroissantes est croissante, que la composée d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante est décroissante.
3. *La courbe représentative de la fonction exponentielle n'a aucune tangente horizontale.*
   Vrai
   Il ne faut pas confondre tangente et asymptote : la courbe représentative de la fonction exponentielle a une asymptote horizontale en $-\infty$ mais pas de tangente horizontale. En effet, la dérivée de la fonction exponentielle est elle-même, et elle ne s'annule jamais.
4. *La fonction $f(x) = \sin(x^2)$ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, et sa dérivée est $f'(x) = \cos(x^2)$.*
   Faux
   La fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de deux fonctions dérivables. Mais d'après la formule de dérivation d'une composée, on a pour tout réel x,
   $$f'(x) = 2x.\cos(x^2)$$
5. *Une fonction dérivable en a est continue en a.*
   Vrai
   On a
   $$f(x) - f(a) = (x - a)\frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$
   De plus
   $$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$$
   donc par le théorème sur la limite d'un produit on a $\lim\limits_{x \to a}(f(x) - f(a)) = 0$, donc $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, ce qui veut bien dire que f est continue en a.

6. *La fonction exponentielle est paire.*
Faux
Ca se saurait... On a $\exp(-x) = \dfrac{1}{\exp(x)}$ et $\dfrac{1}{\exp(x)} \neq \exp(x)$ pour $x \neq 0$. Par exemple $\dfrac{1}{e} \neq e$.
7. *Une fonction définie sur $\mathbb{R}$ ne peut pas être en même temps paire et impaire.*
Faux
La fonction nulle est en même temps paire et impaire. En fait c'est la seule. En effet si pour tout réel x on a $f(-x) = f(x)$ et $f(-x) = -f(x)$ alors $f(x) = -f(x)$ et donc $f(x) = 0$.

Ensembles de définition

1. $f_1(x) = \ln(\sin(x))$
La fonction f_1 est définie pour tous les x tels que $\sin(x)$ est strictement positif. Cela est vrai si et seulement s'il existe un entier relatif k avec
$$2k\pi < x < (2k+1)\pi$$
Ainsi
$$\boxed{\mathcal{D}_{f_1} = \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]2k\pi, (2k+1)\pi[= \ ... \cup]-2\pi, -\pi[\cup]0, \pi[\cup]2\pi, 3\pi[\cup ...}$$
2. $f_2(x) = \sqrt{x^2 - 3x - 4}$
La fonction f_2 est définie pour tous les x tels que $x^2 - 3x - 4$ est positif (ou nul). Etudions le trinôme $x^2 - 3x - 4$: on a $\Delta = 25 = 5^2$ et les deux racines sont -1 et 4. On a alors $x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4)$ qui est positif pour $x \leq -1$ ou $x \geq 4$. Ainsi
$$\boxed{\mathcal{D}_{f_2} =]-\infty, -1] \cup [4, +\infty[}$$
3. $f_3(x) = \dfrac{1}{e^x(x^4 + x^2)}$
La fonction f_3 est définie partout où $e^x(x^4 + x^2)$ est non nul. Comme la fonction exponentielle est non nulle il nous reste à résoudre $x^4 + x^2 = 0$. Or
$$x^4 + x^2 = x^2(x^2 + 1)$$
et $x^2 + 1$ est strictement positif pour tout réel x, donc le dénominateur s'annule seulement pour $x^2 = 0$, c'est-à-dire $x = 0$. Ainsi
$$\boxed{\mathcal{D}_{f_3} = \mathbb{R}^* =]-\infty, 0[\cup]0, +\infty[}$$
4. $f_4(x) = \sqrt{|\tan(x)|}$
On n'a pas à se préoccuper de la racine carrée puisqu'une valeur absolue est toujours positive. La fonction f_4 est définie partout où la fonction tangente l'est, c'est-à-dire pour les x qui ne sont pas de la forme $\frac{\pi}{2} + k\pi$. Ainsi
$$\boxed{\mathcal{D}_{f_4} = \mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \, , \, k \in \mathbb{Z}\right\}}$$

5. $f_5(x) = 2^x$
La fonction f_5 est définie pour tout x. Si on n'est pas convaincu, il faut se souvenir que par définition
$$2^x = \exp(x.\ln(2))$$
Ainsi
$$\boxed{\mathcal{D}_{f_5} = \mathbb{R}}$$

6. $f_6(x) = \dfrac{1}{e^x - e^{1-x}}$
La fonction f_6 est définie pour tout x tel que $e^x - e^{1-x}$ est non nul. On doit donc résoudre $e^x = e^{1-x}$. Or
$$e^x = e^{1-x} \Leftrightarrow x = 1 - x \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$$
et donc
$$\boxed{\mathcal{D}_{f_6} = \mathbb{R} - \left\{\frac{1}{2}\right\} =]-\infty, \frac{1}{2}[\cup]\frac{1}{2}, +\infty[}$$

Dérivation

1. $g_1(x) = (x^2+1)\ln(x)$
La fonction g_1 est définie sur $]0, +\infty[$, et elle est dérivable sur cet intervalle comme produit de fonctions dérivables. La formule de dérivation d'un produit donne :
$$\boxed{g_1'(x) = 2x.\ln(x) + \frac{x^2+1}{x}}$$

2. $g_2(x) = \exp(x + \sin(x))$
La fonction g_2 est définie sur $\mathbb{R}$, et elle est dérivable sur cet intervalle comme composée de fonctions dérivables. La formule de dérivation d'une composée donne
$$\boxed{g_2'(x) = (1 + \cos(x)).\exp(x + \sin(x))}$$

3. $g_3(x) = \dfrac{\sin(x)}{x^4+1}$
Comme la quantité x^4+1 est strictement positive pour tout réel x, la fonction g_3 est définie sur $\mathbb{R}$. Elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables avec dénominateur jamais nul. La formule de dérivation d'un quotient donne :
$$\boxed{g_3'(x) = \frac{\cos(x)(x^4+1) - \sin(x).4x^3}{(x^4+1)^2}}$$

4. $g_4(x) = \tan(x)$
Il faut connaître celle-là par coeur ! La fonction tangente est définie et dérivable sur $\mathbb{R} - \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\,,\, k \in \mathbb{Z}\right\}$ et sa dérivée vaut
$$\boxed{g_4'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}}$$

5. $g_5(x) = \cos^2(x)$
   Rappelons que cette notation signifie que $g_5(x) = (\cos(x))^2$. La fonction g_5 est définie sur $\mathbb{R}$, et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. La formule de dérivation d'une composée donne

$$\boxed{g_5'(x) = -2.\sin(x).\cos(x) = -\sin(2x)}$$

6. $g_6(x) = (2x+1)^3$
   La fonction g_6 est définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions dérivables. La formule de dérivation d'une composée donne

$$\boxed{g_6'(x) = 3.2.(2x+1)^2 = 6(2x+1)^2}$$